Über die Charakterisierung der Hurwitzschen Zetafunktion mittels Funktionalgleichungen.

Von MIKLÓS MIKOLÁS in Budapest.

1. Seitdem HAMBURGER vor einigen Jahrzehnten den Satz entdeckt hat, daß die Riemannsche Funktionalgleichung von $\zeta(s)$[1]) diese Funktion in der Gesamtheit der durch *gewöhnliche Dirichletsche Reihen* definierten meromorphen Funktionen nebst gewisser Ordnungsbeschränkung bis auf einen konstanten Faktor kennzeichnet[2]), ist dieses Resultat in mehreren Arbeiten behandelt bzw. weiterentwickelt worden.[3])

In dieser kleinen Notiz wollen wir zeigen, daß die aus $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(u+n)^{-s}$ $(0<u\leqq 1;\ \Re(s)>1)$ durch analytische Fortsetzung entstehende verallgemeinerte (Hurwitzsche) Zetafunktion $\zeta(s,u)$ sich mittels zwei leicht beweisbarer Eigenschaften, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial u}\Phi(s+1,u)=\Phi(s,u) \qquad (s \text{ beliebig}), \tag{1}$$

$$\Phi(s_1,v)*\Phi(s_2,v)|(u)=\Phi(s_1+s_2,u) \qquad (\Re(s_1),\Re(s_2)\geqq 1)^{4)} \tag{2}$$

mit $\Phi(s,u)=\Gamma(s)^{-1}\bar{\zeta}(1-s,u)$ eindeutig charakterisieren läßt; hierbei bezeichnet $\bar{\zeta}(s,u)$ diejenige Funktion von u mit der Periode 1, welche in $0<u\leqq 1$ mit $\zeta(s,u)$ übereinstimmt. ($\Phi(s,u)$ ist ersichtlich eine *ganze* Funktion von s.) Wir bemerken, daß man zur Charakterisierung nebst (1) und (2) nur passende Differenzierbarkeitsbedingungen braucht, *ohne* die Einschränkung, daß die betreffende Funktion durch eine Dirichletsche Reihe erklärt ist bzw. einer Abschätzungsformel genügt.

---

1) Für einen einfachen Beweis vgl. [6].

2) S. [3].

3) Vgl. z. B. [1], [2], [4], [8], [9].

4) Es ist die sog. Hurwitzsche Formel (14) für $\zeta(s,u)$ anzuwenden; vgl. [5]; [10], S. 269. — Wir benutzen die übliche Bezeichnung der *Faltung* (über (0, 1)): $f_1(v)*f_2(v)|(u)=$ $=\int\limits_0^1 f_1(v)f_2(u-v)\,dv$, wobei — wie durchwegs in dieser Arbeit — das Integral in *Lebesgueschen Sinne* zu verstehen ist.

2. Wir behaupten den folgenden

Satz. *Es sei* $\Phi(s, u)$ *eine ganze Funktion der komplexen Variablen* s *und eine nach* 1 *periodische, in* $(0, 1)$ *differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen* u, *welche für* $s>1$ *zur Klasse* $\mathrm{Lip}_K 1$ *(*K *unabhängig von* u*) gehört. — Wir nehmen an, daß die Funktionalgleichungen* (1) *und* (2) *für* $1<s<2$ *bzw.* $1<s_1, s_2<2$ *und für* $u \in (0, 1)$ *gelten, ferner, daß die komplexen Fourierkoeffizienten* $c_n(s)$ *von* $\Phi(s, u)$ *inbezug auf* $0<u<1$ *für* $n>0$ *in* $1<s<2$ *nicht identisch verschwinden und die Bedingung* (*) $|\arg c_n(s)|<\pi$ *erfüllen.*

Dann hat man für alle s *und* $0<u<1$

$$\Phi(s, u) \equiv \Gamma(s)^{-1}\zeta(1-s, u).\text{[5]} \tag{3}$$

Beweis. 1° Es sei $1<s<2$.

Da wir u. a. die Lipschitz-Bedingung

$$|\Phi(s+\Delta s, u)-\Phi(s, u)| \leqq K|\Delta s| \quad (u \text{ beliebig reell, } |\Delta s| \text{ genügend klein}) \tag{4}$$

angenommen haben, so ist $\Phi(s, u)$ auch für $u=0$, $u=1$ stetig und die Existenz von

$$c_n(s)=\int_0^1 \Phi(s, v)e^{-2n\pi i v}dv \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{5}$$

ist gesichert; wegen der *Differenzierbarkeit* von $\Phi(s, u)$ in $0<u<1$ gilt hier die Fouriersche Darstellung

$$\Phi(s, u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(s)e^{2n\pi i u}. \tag{6}$$

Andrerseits, mit Rücksicht auf (1) und die (aus unseren Voraussetzungen folgende) Vollstetigkeit von $\Phi(s+1, u)$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\Phi(s+1, u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2n\pi i\cdot c_n(s+1)e^{2n\pi i u} \qquad (0<u<1). \tag{7}$$

(6), (7) und (1) implizieren nach dem Unizitätssatz von Heine—Cantor[6]) die Beziehungen

$$c_n(s)=2n\pi i\cdot c_n(s+1) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots); \tag{8}$$

insbesondere für $n=0$:

$$c_0(s)\equiv 0. \tag{9}$$

2° Die Faltung in (2) ist für $1<s<2$ offenbar vorhanden und gestattet die folgende komplexe Fourierentwicklung:

$$\Phi(s_1, v)*\Phi(s_2, v)|(u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(s_1)c_n(s_2)e^{2n\pi i u} \qquad (0<u<1); \tag{10}$$

---

[5]) Für $s=0$ ist natürlich der entsprechende Grenzwert zu verstehen: $\Phi(0, u)\equiv -1$

[6]) Vgl. z. B. [7], S. 116—119.

eine Reihe, welche — gemäß (2) — mit derjenigen in (6) (mit s_1+s_2 anstatt s) identisch übereinstimmen soll. Das liefert

$$(11)\qquad c_n(s_1)c_n(s_2)=c_n(s_1+s_2),$$

also eine bekannte *Cauchysche Funktionalgleichung* für $c_n(s)$ $(n=1,2,\ldots)$ mit $1<s_1, s_2<2$.

Da $c_n(s)$ für $s\in(1,2)$ auf Grund von (4) trivial *stetig* ist, und ihr identisches Verschwinden ausgeschlossen wurde, ergibt sich als Lösung

$$(12)\qquad c_n(s)=e^{A_n s}$$

mit einer beliebigen komplexen Konstanten A_n.

3° Setzt man dies in (8) ein und beachtet die Bedingung (*), so bestimmt sich $c_n(s)$ eindeutigerweise:

$$(13)\qquad c_n(s)=e^{s\left[-\ln(2n\pi)-i\frac{\pi}{2}\right]}=(2n\pi i)^{-s}\qquad (n=1,2,\ldots),$$

wobei also der Hauptwert der Potenz zu verstehen ist.

Die gleichzeitige Benützung von (6), (9), (13) und der Hurwitzschen Formel

$$(14)\qquad \zeta(s,u)=2\Gamma(1-s)\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi)^{s-1}\sin\left(2n\pi u+\frac{\pi s}{2}\right)\quad (\Re(s)>0;\ 0<u\leqq 1)$$

liefert nun unmittelbar[7])

$$(15)\qquad \begin{cases} \Phi(s,u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\,(2n\pi i)^{-s}e^{2n\pi i u}= \\ =2\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi)^{-s}\cos\left(2n\pi u-\frac{\pi s}{2}\right)=\Gamma(s)^{-1}\zeta(s,u) \end{cases}$$

und zwar, wegen der Holomorphie von $\Phi(s,u)$ nicht nur für $1<s<2$, sondern auf der ganzen s-Ebene. Q. e. d.

3. Es sei noch erwähnt, daß (1) und (2) für $s=p$ $(p=0,1,\ldots)$ bzw. für $s_1=\lambda$, $s_2=\mu$ $(\lambda,\mu=1,2,\ldots)$ mit den Formeln

$$\left.\begin{aligned} &(16)\qquad B'_{p+1}(u)=B_p(u)\\ &(17)\qquad \int_0^1 B_\lambda(v)\,\overline{B}_\mu(u-v)\,dv=B_{\lambda+\mu}(u)\end{aligned}\right\}\quad(0<u<1)$$

äquivalent sind, wo $B_p(u)$ das Bernoullische Polynom p-ten Grades, $\overline{B}_p(u)$ die mit $B_p(u)$ in (0, 1) übereinstimmende, nach 1 periodische Funktion bezeichnet.

---

[7]) Der Strich neben dem Summenzeichen in (15) bedeutet, wie üblich, daß man das Glied mit $n=0$ überspringen soll.

Wie man weiß, (16) und die Annahme

$$\int_0^1 B_p(v)dv = 0 \qquad (p=1,2,\ldots) \tag{18}$$

determinieren vollständig das System der Bernoullischen Polynome; der soeben bewiesene Satz ist als ein „transzendentes", passend erweitertes Gegenstück dieser elementaren Tatsache anzusehen.

Literaturverzeichnis.

[1] S. Bochner und K. Chandrasekharan, On Riemann's functional equation, *Ann. of Math.*, (2) **63** (1956), 336—360.

[2] K. Chandrasekharan und S. Mandelbrojt, Sur l'équation fonctionnelle de Riemann, *Comptes Rendus Paris*, **242** (1956), 2793—2796.

[3] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion, *Math. Zeitschrift*, **10** (1921), 240—254; **11** (1922), 224—245; **13** (1922), 283—311.

[4] H. Hamburger, Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind, *Math. Annalen*, **85** (1922), 129—140.

[5] M. Mikolás, Mellinsche Transformation und Orthogonalität bei $\zeta(s,u)$; Verallgemeinerung der Riemannschen Funktionalgleichung von $\zeta(s)$, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 143—164.

[6] M. Mikolás, A simple proof of the functional equation for the Riemann zeta-function and a formula of Hurwitz, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 261—263.

[7] W. Rogosinski, *Fouriersche Reihen* (Berlin—Heidelberg, 1930).

[8] C. L. Siegel, Bemerkung zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion, *Math. Annalen*, **86** (1922), 276—279.

[9] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function* (Oxford, 1951).

[10] E. T. Whittaker und G. N. Watson, *A course of modern analysis*, vierte Auflage (Cambridge, 1952).

(Eingegangen am 23. Oktober 1958.)